Об одной особенности теоремы Котельникова

Плеханов А.С. (andyplekhanov@gmail.com)

1. Введение

Написать данную статью меня вдохновила следующая задача:

Как известно из теоремы Котельникова, для того, чтобы аналоговый сигнал мог быть оцифрован а затем восстановлен, необходимо и достаточно, чтобы частота дискретизации была больше или равна удвоенной верхней частоте аналогого сигнала. Предположим, у нас есть синус с периодом 1 секунда. Тогда $f = 1/T = 1$ *герц,* $\sin((2 * \pi/T) * t) = \sin(2 * \pi * t)$*, частота дискретизации 2 герца, период дискретизации 0,5 секунды. Подставляем значения, кратные 0,5 секунды в формулу для синуса* $\sin(2 * \pi * 0) = \sin(2 * \pi * 0,5) = \sin(2 * \pi * 1) = 0$

Везде получаются нули. Как же тогда можно восстановить этот синус ?

Поиск в интернете ответа на данный вопрос не дал, максимум того, что удалось найти - это различные дискуссии на форумах, где приводились довольно причудливые аргументы за и против вплодь до ссылок на эксперименты с различными фильтрами. Следует указать, что теорема Котельникова - это математическая теорема и доказывать или опровергать ее следует только математическими методами. Чем я и занялся. Оказалось, что доказательств этой теоремы в различных учебниках и монографиях достаточно много, но найти, где возникает данное противоречие мне долгое время не удавалось, поскольку доказательства приводились без многих тонкостей и деталей. Скажу также, что и сама формулировка теоремы в разных источниках была различной. Поэтому в первом разделе я приведу детальное доказательство этой теоремы, следуя оригинальной работе самого академика [1].

2. Доказательство теоремы Котельникова

Сформулируем теорему, как она дана в первоисточнике [1]:

Любую функцию $F(t)$*, состоящую из частот от 0 до* f_1 *периодов в секунду, можно представить рядом*

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \frac{\sin \omega_1 [t - k/(2f_1)]}{t - k/(2f_1)}$$

[1] На самом деле в работе Котельникова сформулировано несколько теорем. Но речь пойдет о самой первой как по порядку так и по важности. Следует также заметить, что теорема формулируется в форме "необходимо и достаточно". Доказательство обратного условия мы опустим, поскольку оно не имеет отошения к делу.

где k — целое число; $\omega = 2\pi f_1$; D_k — постоянные, зависящие от $F(t)$.

Доказательство: Любая функция $F(t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле (конечное число максимумов, минимумов и точек разрыва на любом конечном отрезке) и интегрируемая в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, что вседа в электротехнике имеет место, может быть представлена интегралом Фурье:

$$F(t) = \int_0^{+\infty} C(\omega)\cos\omega t d\omega + \int_0^{+\infty} S(\omega)\sin\omega t d\omega$$

т.е. как сумма бесконечного количества синусоидальных колебаний с частотами от 0 до $+\infty$ и амплитудами $C(\omega)d\omega$ и $S(\omega)d\omega$, зависящими от частоты. Причем

$$C(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\cos\omega t dt$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\sin\omega t dt$$

В нашем случае, когда $F(t)$ состоит лишь из частот от 0 до f_1, очевидно

$$C(\omega) = 0$$

$$S(\omega) = 0$$

при

$$\omega > \omega_1 = 2\pi f_1$$

и поэтому $F(t)$ может быть представлена так:

$$F(t) = \int_0^{\omega_1} C(\omega)\cos\omega t d\omega + \int_0^{\omega_1} S(\omega)\sin\omega t d\omega$$

функции же $C(\omega)$ и $S(\omega)$, как и всякие другие на участке

$$0 < \omega < \omega_1$$

Замечание автора: а как насчет граничных точек ?

могут быть представлены всегда рядами Фурье, причем эти ряды могут, по нашему желанию состоять из одних косинусов или одних синусов, если мы возьмем за период двойную длину участка, т.е. $2\omega_1$.

Примечание автора: здесь надо дать пояснение. Котельников использует возможность дополнить функции $C(\omega)$ и $S(\omega)$ таким образом, чтобы $C(\omega)$ стала четной, а $S(\omega)$ нечетной функцией на двойном участке относительно ω_1. Соответственно на второй половине участка значения этих функций будут $C(2*\omega_1-\omega)$ и $-S(2*\omega_1-\omega)$. Эти функции отражаются относительно вертикальной оси с координатой ω_1, а функция $S(\omega)$ еще и меняет знак

Таким образом

$$C(\omega) = \sum_{0}^{\infty} A_k \cos\frac{2\pi}{2\omega_1}k\omega$$

$$S(\omega) = \sum_{0}^{\infty} B_k \sin\frac{2\pi}{2\omega_1}k\omega$$

Введем следующие обозначения

$$D_k = \frac{A_k + B_k}{2}$$

$$D_{-k} = \frac{A_k - B_k}{2}$$

Тогда

$$C(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \cos\frac{\pi}{\omega_1}k\omega$$

$$S(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \sin\frac{\pi}{\omega_1}k\omega$$

Подставляя получаем:

$$F(t) = \int_0^{\omega_1} \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \cos\frac{\pi}{\omega_1}k\omega \cos\omega t d\omega + \int_0^{\omega_1} \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \sin\frac{\pi}{\omega_1}k\omega \sin\omega t d\omega$$

Преобразуем

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \int_0^{\omega_1} (\cos\frac{\pi}{\omega_1}k\omega\cos\omega t + \sin\frac{\pi}{\omega_1}k\omega\sin\omega t)d\omega$$

Еще преобразуем

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \int_0^{\omega_1} (\cos\omega(t - \frac{\pi}{\omega_1}k))d\omega$$

Интегрируем и заменяем ω_1 на $2\pi f_1$:

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \frac{\sin\omega_1[t - k/(2f_1)]}{t - k/(2f_1)}$$

3. Неточность в теореме Котельникова

За исключением одного сомнительного момента все доказательство выглядит строгим. В чем же проблема ? Для понимания этого обратимся к одному не очень широко известному свойству обратного преобразования Фурье. Оно гласит, что при обратном преобразовании из суммы синусов и косинусов в исходную функцию, значение этой функции будет равно

$$F(x_0) = \frac{\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)}{2}$$

то есть восстановленная функция равна полусумме значений пределов. К чему это приводит ? Если наша функция непрерывная, то ни к чему. Но если в нашей функции есть конечный разрыв, то значения функции после прямого и обратного преобразования Фурье будут несовпадать с исходным значением. Вспомним теперь шаг в доказательстве теоремы, где интервал удваивается. Функция $S(\omega)$ дополняется функцией $-S(2 * \omega_1 - \omega)$. Если $S(\omega_1)$ (значение в точке ω_1) равно нулю, ничего плохого не происходит. Однако если значение $S(\omega_1)$ не равно нулю, восстановленная функция не будет равна исходной, поскольку в этой точке возникает разрыв равный $2S(\omega_1)$.

Вернемся теперь к исходной задаче про синус. Как известно, синус - нечетная функция, образ которой после преобразования Фурье есть $\delta(\omega - \Omega_0)$ — дельта функция. То есть в нашем случае, если синус имеет частоту ω_1, получаем:

$$C(\omega) = 0$$

$$S(\omega) = \delta(\omega - \omega_1)$$

Очевидно, что в точке ω_1 суммируюся две дельта-функции от $S(\omega)$ и $-S(\omega)$ образуя ноль, что мы и наблюдаем.

4. Заключение

Теорема Котельникова, безусловно, великая теорема. Однако она должна быть дополнена еще одним условием, а именно

$$S(\omega_1) = 0$$

В такой формулировке исключаются граничные случаи, в частности случай с синусом у которого частота равна граичной частоте ω_1, поскольку для него использовать теорему Котельникова с приведенным выше условием нельзя.

Список литературы

[1] В.А.Котельников *О пропускной способности "эфира"и проволоки в электросвязи.* Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. 1933 г.